5.3 A Integral Definida

Agora irá se construir a ideia da integral definida. Para isso, veja uma motivação. Considere a região R dada pela área representada como na Figura 5.1, ou seja, a região delimitada na parte superior pela curva f, pela parte inferior pelo x, pela lado esquerdo pela reta $x = a$ e pelo lado direito pela reta $x = b$. Para simplificar, considere que f é uma função contínua no intervalo e que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$.

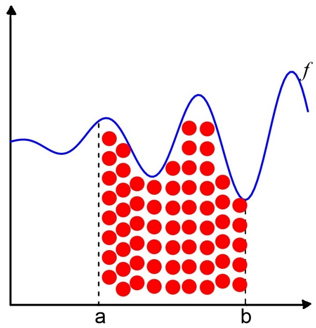

Figura 5.1: Região do plano abaixo da curva f, acima do eixo x e entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Deseja-se obter um número A que seja a medida da área da região R. Para isso, será usado uma divisão da região em polígonos, de forma que a área total seja a soma das áreas desses polígonos.
Considere o número dado por $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, existem números $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ números tais que, para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tem-se $x_i - x_{i-1} = \Delta x$. Então, tente-se que cada um dos intervalos $I_i =]x_{i-1}, x_i[$ tem intersecção vazia com o intervalo I_j, se $i \neq j$. Dessa forma, dizemos que o conjunto $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$ é uma *Partição* para o intervalo $[a, b]$.
A região R pode ser dividida em sub-regiões, como visto na Figura 5.2.
Cada sub-região R_i da Figura 5.2 é um retângulo de base medindo $\Delta x{=}x_i - x_{i-1}$ e altura dado por $f(x_i)$. Além disso, como f é contínua em cada subintervalo fechado $[x_{i-1}, x_i]$, segue que existe um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(c_i)$ é o valor mínimo da função em $[x_{i-1}, x_i]$. Como a área A_i de cada retângulo R_i é dada por $f(c_i) \times \Delta x$, segue que uma aproximação para a área A, denominada por A^1_{apro}, é dada por:

$$A^1_{apro} = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = f(c_1)\Delta x + f(c_2)\Delta x + \cdots + f(c_n)\Delta x \qquad (5.2)$$

Observe que o valor da área A^1_{apro} é menor ou igual ao valor da área A. Diminuindo o valor de Δx, o número de subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ vão aumentar, como visto na Figura 5.3.
Além disso, a nova área aproximada, A^2_{apro}, será uma aproximação melhor do que a anterior, ou seja, $A^1_{apro} \leq A^2_{apro}$, mas ainda vale que $A^2_{apro} \leq A$. Fazendo o número de subintervalos crescer cada vez mais, o valor de A^n_{apro} fica cada vez mais próximo do valor de A, de forma que a diferença $A - A^n_{apro}$,

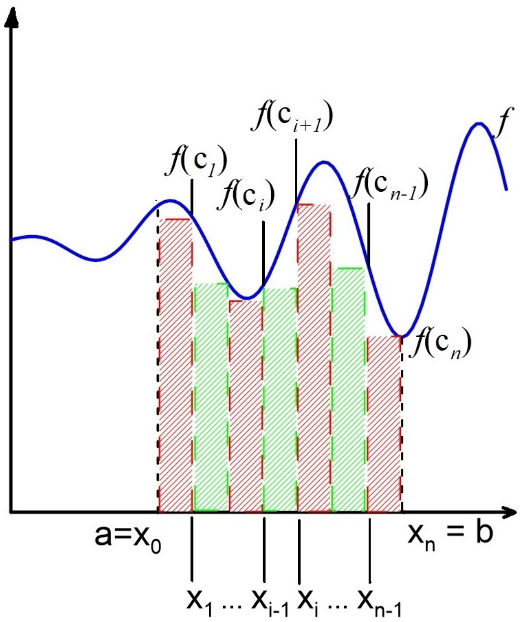

Figura 5.2: Divisão da região R em retângulos, cuja soma da área da um valor aproximado para a área da região R.

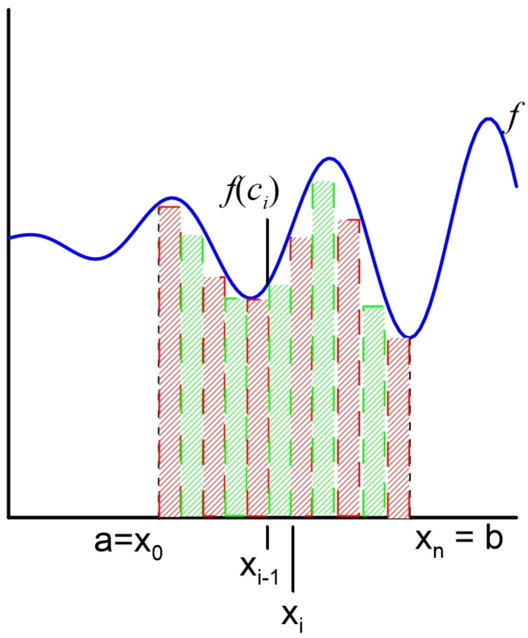

Figura 5.3: Redivisão da região R em retângulos, utiizando um valor menor de Δx.

pode-se tornar um número tão pequeno quanto se deseja, bastando tomar um valor de n suficientemente grande, o que nos leva a definição a seguir.

Definição 5.3.1 *Suponha que f seja uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Seja R a região delimitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Seja $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$ tal que $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ e $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, $\forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Então, se $f(c_i)$ for o valor mínimo* *absoluto da função f no i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, segue que a medida da área A da região R fica dada por:*

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x. \tag{5.3}$$

Em outras palavras, o que a Definição 5.3.1 diz é que para qualquer número $\epsilon > 0$ escolhido, existe um índice $N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \in \mathbb{N}$ e $n > N$, então

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x - A \right| < \epsilon.$$

Uma ideia semelhante poderia ser utilizado para triângulos onde a altura seja dada pelo valor máximo de f em cada um dos subintervalos. Nessa caso, a área seria menor ou igual ao valor de cada uma das áreas aproximadas, mas a conclusão ainda seria a mesma.

Exemplo 5.3.1 *Ache a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$, o eixo x e a reta $x = 3$.*

Solução: Na Figura 5.4 está representado um dos i-ésimos retângulos da somatória que dá uma aproximação para o valor da área.

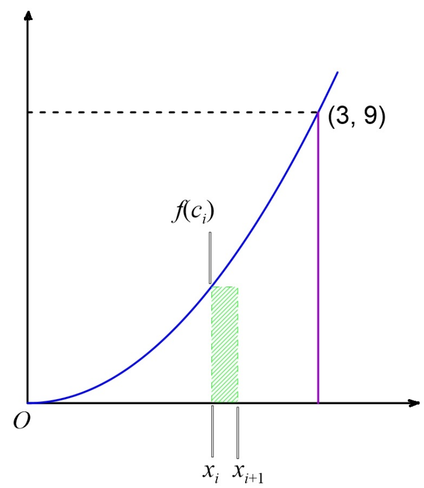

Figura 5.4: Representação de um retângulo para o cálcuo da área abaixo da curva $y = x^2$, acima do eixo x e a reta $x = 3$..

Cada um desses intervalos tem base dada por $\Delta x = \dfrac{3-0}{n} = \dfrac{3}{n}$, onde n é dado pelo tamanho da partição do intervalo e altura dada por $f(c_i) = (x_{i-1})^2 = [(i-1)\Delta x]^2$, visto que a função f é crescente no intervalo. Assim, da Definição 5.3.1, segue que:

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} [(i-1)\Delta x]^2 \Delta x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 (\Delta x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \left(\frac{3}{n}\right)^3.$$

O cálculo da somatória pode ser assim feito: como $(i-1)^2 = i^2 - 2i + 1$, segue das propriedades da adição que

$$\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1.$$

Além disso, sabendo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$, segue que

$$A = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\times\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\times\left(\frac{3}{n}\right)^3 =$$

$$= \frac{27}{n^3}\times\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6} = \frac{9}{2}\times\frac{2n^2-3n+1}{n^2} = 9.$$

Portanto, a área da região é de 9 $u.a.$. □

Até aqui foi utilizado partições onde Δx é constante, mas isso não é mais necessário. Na verdade, para todo intervalo $[a,b]$, se $\{a = x < 0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ é uma partição e considerando $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, segue que é possível definir a Norma da partição, denotada por $||\Delta||$, que é o maior valor de $\Delta_i x$. Assim, fazer $n \to \infty$ corresponde a fazer $||\Delta|| \to 0$. Outra comentário importante é que não é necessário considerar o valor mínimo de f em cada um dos subintervalos, isto é, para o cálculo do limite pode-se escolher qualquer ponto $x_{i-1} \geq \xi_i \geq x_i$. Com isso, a soma pode ser reescrita na forma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x.$$

Uma soma S_n, como apresentada anteriormente, é chamada de *Soma de Riemann*, e ela é utilizada para definir a *Integral Definida*, como a seguir.

Definição 5.3.2 *Seja f uma função cujo domínio contenha o intervalo fechado $[a,b]$. Então, diz-se que f é integrável em $[a,b]$ se existir um número L satisfazendo a seguinte condição: para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda partição Δ para o qual $||\Delta|| < \delta$, com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, tem-se*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x - L\right| < \epsilon.$$

Nessas condições, escreve-se:

$$L = \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x. \tag{5.4}$$

A Definição 5.3.2 diz que é possível tomar o valor da soma de Riemann da função f tão próximo de L quanto deseja, para isso basta tomar o valor da norma da partição suficientemente pequena. É possível provar que se esse limite existe, então ele é único, logo é possível estabelecer a seguinte definição.

Definição 5.3.3 *Se f é uma função definida no intervalo $[a,b]$ então, a Integral Definida de f de a até b, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, é dada por*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x,$$

se o limite existir.

Na notação de integral definida, $\int$ é chamado de sinal de integração, $f(x)$ é chamado de integrando, a é chamado de limite inferior e b é chamado de limite superior. O primeiro resultado sobre a integração, apresentado a seguir, dá uma condição de integrabilidade. Esse resultado não será demonstrado e a sua demonstração pode ser encontrada em livros de análise matemática ou de cálculo avançado.

Teorema 5.3.1 *Se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Demonstração: Não será apresentada nestas notas. □

Da Definição 5.3.3 e da motivação geométrica de cálculo de área, segue que se a função $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, então a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ pode ser interpretada geometricamente como sendo a medida da área da região R entre a função, o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$. A seguir são apresentadas duas definições importantes.

Definição 5.3.4 *Se $a > b$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

se $\int_a^b f(x)dx$ existir.

Definição 5.3.5 *Se $f(a)$ existe, então*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

A seguir são listadas algumas das propriedades da integral definida.

Teorema 5.3.2 *1. Se k é uma constante qualquer, então*

$$\int_a^b k dx = k(b-a).$$

2. Se a função f é integrável no intervalo fechado $[a,b]$ e se k é uma constante qualquer, então

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_b^a f(x)dx.$$

3. *Se as funções f e g são integráveis em $[a,b]$, então a função $f \pm g$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_b^a [f \pm g](x)dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx.$$

4. *De maneira geral, se as funções f_1, $f_2, \cdots, f_n$ são integráveis em $[a,b]$, então a função $f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_b^a [f_1 \pm f_2 \pm \cdots \pm f_n](x)dx = \int_b^a f_1(x)dx \pm \int_b^a f_2(x)dx \pm \cdots \pm \int_b^a f_n(x)dx.$$

5. *Se a função f é uma função integrável nos intervalos $[a,b]$, $[a,c]$ e $[c,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. *Se as funções f e g são integráveis no intervalo $[a,b]$, com $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a,b]$, então seque que*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

7. *Suponha que f seja uma função contínua em $[a,b]$. Se m e M são, respectivamente, os valores mínimos e máximos absolutos de f em $[a,b]$, isto é, $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demonstração: A demonstração dessas propriedades podem ser encontradas nos livros de cálculo e serão omitidas nessas notas. □

Agora vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.3.2 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

1. $\displaystyle\int_{-3}^5 4dx.$

2. *Sabendo que* $\displaystyle\int_1^3 x^2dx = \frac{26}{3}$ *e* $\displaystyle\int_1^3 xdx = 4$, *qual o valor de* $\displaystyle\int_1^3 (3x^2 - 5x + 2)dx.$

3. *Encontre uma estimativa para o valor da integral* $\displaystyle\int_{1/2}^4 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx.$

4. *Encontre uma estimativa para o valor da integral* $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sqrt{sen(x)})dx.$

Solução:

1. Tem-se que

$$\int_{-3}^{5} 4dx = 4\int_{-3}^{5} dx = 4(5-(-3)) = 4*8 = 32.$$

2. Tem-se que

$$\int_{1}^{3}(3x^2-5x+2)dx = 3\int_{1}^{3}x^2dx - 5\int_{1}^{3}xdx + 2\int_{1}^{3}dx =$$

$$= 3\times\frac{26}{3} - 5\times 4 + 2(3-1) = 26-20+4 = 10.$$

3. Como $f(x) = x^3-6x^2+9x+1$, segue que $f'(x) = 3x^2-12x+9$ e, consequentemente, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9 = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$. Portanto, pontos críticos de f são os pontos $x = 1$ e $x = 3$. Como a função f é contínua (f é uma função polinomial) segue que assume valor máximo absoluto e mínimo absoluto no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$. Assim, como $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{6}{4} + \frac{9}{2} + 1 = \frac{33}{8}$, $f(1) = 1^3-6\times 1^2+9\times 1+1 = 5$, $f(3) = 3^3-6\times 3^2+9\times 3+1 = 1$ e $f(4) = 4^3-6\times 4^2+9\times 4+1 = 5$, e $1\leq\frac{33}{8}\leq 5$, segue que 1 é o valor mínimo absoluto de f e 5 é o valor máximo absoluto de f no intervalo $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$. Logo, se m e M são, respectivamente, os valores mínimos e máximos absolutos de f em $[a,b]$, segue que

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

e, consequentemente,

$$1\times\left(4-\frac{1}{2}\right)\leq\int_{1/2}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx\leq 5\times\left(4-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{7}{2}\leq\int_{1/2}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx\leq\frac{35}{2}.$$

Portanto, o valor da integral definida está no intervalo $\left[\frac{7}{2}, \frac{35}{2}\right]$.

4. Como $f(x) = \sqrt{sen(x)}$, segue que $f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}}$. Consequentemente, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{sen(x)}} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Portanto, o ponto crítico de f no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

é o ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$. Como a função f é contínua, segue que assume valor máximo absoluto e mínimo absoluto no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Assim, como $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sqrt{1} = 1$ e $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, e $0.84 \approx \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \leq 1$, segue que $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ é o valor mínimo relativo de f e 1 é o valor máximo de f no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$. Logo, se m e M são, respectivamente, os valores mínimos e máximos absolutos de f em $[a, b]$, segue que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

e, consequentemente,

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{sen(x)}dx \leq 1 \times \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \leq \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sqrt{sen(x)}dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, o valor da integral definida está no intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

□

A seguir é apresentado um teorema sobre existência de um retângulo de área igual a área de um curva.

Teorema 5.3.3 ***(Teorema do Valor Médio para Integrais:)*** *Se a função f é contínua no intervalo $[a, b]$, então existe um número χ em $[a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\chi)(b-a).$$

O valor $f(\chi)$ é chamado de Valor Médio (ou Valor Intermediário) de f no intervalo $[a, b]$.

Demonstração: Ver nos livros de cálculo. □

O que o teorema do valor médio para integrais garante é que (pensando na integral como área) para qualquer função f contínua, definida em $[a, b]$, existe um retângulo de base $b - a$ e altura $f(\chi)$ tal que a área abaixo da curva é igual a área desse retângulo. Além disso, o teorema garante a existência, mas não garante a unicidade e nem mostra como achar esse valor. Agora, vamos a um exemplo.

Exemplo 5.3.3 *Encontre um valor χ tal que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = f(\chi)(3-1)$, sendo $f(x) = x^2$.*

Solução: Do Item 2 da Exemplo 5.3.2, segue que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \frac{26}{3}$. Daí,

$$\frac{26}{3} = \int_1^3 f(x)dx = f(\chi)(3-1) \Rightarrow 2f(\chi) = \frac{26}{3} \Rightarrow f(\chi) = \frac{13}{3}.$$

Como $f(x) = x^2$, segue que

$$\chi^2 = \frac{13}{3} \Rightarrow \chi = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}.$$

Sabendo que o intervalo de estudo é $[1,3]$, segue que $\chi = \sqrt{\frac{13}{3}}$. Portanto, $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = \left(\sqrt{\frac{13}{3}}\right)(3-1)$. □

Para sintetizar o que foi falado sobre valor médio para integrais, pode-se utilizar a seguinte definição.

Definição 5.3.6 *Se a função f é integrável no intervalo fechado $[a,b]$, o valor médio de f em $[a,b]$ é dado por*

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

5.4 Exercícios

Exercício 5.4.1 *Determine um intervalo fechado contendo o valor de cada uma das integrais a seguir.*

1. $\int_3^7 2xdx$;
2. $\int_0^4 x^2dx$;
3. $\int_{-3}^6 \sqrt{3+x}dx$;
4. $\int_{-4}^0 (x^4 - 8x^2 + 16)dx$;
5. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} sen(x)dx$;
6. $\int_1^4 |x-2|dx$.

Exercício 5.4.2 *Sabendo que $\displaystyle\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$, encontre o valor médio de cada das integrais a baixo, no intervalo indicado.*

1. $\displaystyle\int_0^2 x^2dx$;
2. $\displaystyle\int_1^2 x^3dx$;

3. $\displaystyle\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx$;

4. $\displaystyle\int_0^4 (x^2 + x - 6)dx$;

5. $\displaystyle\int_{-2}^2 (x^3 + 1)dx$;

6. $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 - 2x)^2 dx$.